ユークリッド空間内の周期的極小曲面について(部分多様体の微分幾何学)

庄田, 敏宏

数理解析研究所講究録 1460 巻 2005 年 53-71

ユークリッド空間内の周期的極小曲面について

庄田　敏宏
Toshihiro Shoda

九州大学 大学院 数理学研究院
Faculty of Mathematics, Kyushu University

日本学術振興会 特別研究員 (PD)
Research Fellow of
the Japan Society for the Promotion of Science

1 Introduction

本講演はn次元平坦トーラス内の種数gコンパクト極小曲面，即ち，n次元ユークリッド空間内のn方向に周期的な極小曲面についてを論じ，主に$n=3,4$の場合を考察する．水中の脂質や界面活性剤などの膜は Schoen's Gyroid や Schwarz 曲面などの3方向に周期的な極小曲面によって形作られる事から，周期的な極小曲面は数学に限らず化学をはじめとした他分野にとっても興味ある研究対象である．

n次元平坦トーラス内の種数gコンパクト極小曲面には Weierstrass 表現公式と云う式表示が知られていて，極小曲面は (平行移動は無視して) 正則微分$\omega_1,\cdots,\omega_n$を定点p_0から線積分した実部として表される：

$$\Re\int_{p_0}^{p}(\omega_1,\cdots,\omega_n)$$

ただし，この積分が道の取り方によらずwell-definedに定義される事が重要な問題で，周期問題と云われている．この極小曲面に対して

$$\Re \int_{p_0}^{p} e^{i\theta}(\omega_1, \cdots, \omega_n)$$

がwell-definedになるときこれを随伴極小曲面と云い，特に$\theta = \pi/2$の随伴極小曲面を共役極小曲面と云う．随伴極小曲面の存在は極小曲面論では主要な研究であり，$n = 3$の場合には長野-Smyth [4]による判定法が知られている．また，随伴極小曲面が可算稠密な$\theta \in S^1$に対して存在するような3次元トーラス内の極小曲面をProperty **P**を満たす極小曲面と云うが，Meeks [2]はこうした概念を導入し様々な結果を与えている．

筆者は[7]において4次元平坦トーラス内のtrigonal極小曲面(球面の分岐3重被覆の構造をもつ)全体のモジュライ空間を発見し，さらに種数が4の場合の具体例を与えたのであるがその後，高種数の場合の(種数が10)具体例を構成できたので本稿ではその具体例を紹介する．このtrigonal極小曲面は共役極小曲面をもち，可算稠密な角度$e^{i\theta} \subset S^1$に対して随伴極小曲面をもち，さらに4次元平坦トーラス内において0にホモローグになる(section 5.2)．そのような極小曲面はNagano-Smyth [5]によって与えられているのであるが，ここでNagano-Smythの議論を復習する．$S_f(M_g)$をM_gの自己同型群の部分群とする．fが対称群$S_f(M_g)$をもつとは$S_f(M_g)$がfによって$\mathbf{R}^n/\Lambda$の適当なアフィン変換に拡張されるときを云う．対称群$S_f(M_g)$に対応するアフィン変換の線形部分がトーラスにおける既約表現になるときfは既約対称群$S_f(M_g)$をもつと云う．また，これの複素化が既約表現になるときfは絶対既約対称群$S_f(M_g)$をもつと云う．このような既約性を仮定してNagano-Smythでは上記のような性質をもつ極小曲面の存在性を示している．ところが今回構成した具体例は可約表現はもつが既約性はない具体例である(section 5.3)．この事からNagano-Smythによる仮定はベストな仮定ではない，つまり，既約性は可約性に改善される可能性が示唆される．

最後に今述べた結果を定理として述べる．

Main Theorem.

4次元平坦トーラス内の0にホモローグな種数10の*trigonal*極小曲面で以下を満たすものが存在する：(*i*) 共役極小曲面をもち，可算稠密な角度$e^{i\theta} \subset S^1$に対して随伴極小曲面をもつ，(*ii*) 可約対称群をもつ(すなわち*Nagano-Smyth*の仮定はベストではない)．

2 Minimal surfaces in n-dimensional flat tori

このセクションでは n 次元平坦トーラス $\mathbf{R}^n/\Lambda$ 内のコンパクトな極小曲面についての結果を紹介する．はじめに次の極小曲面論における基本定理を述べる．

Theorem 2.1. (Weierstrass 表現公式) $f : M_g \longrightarrow \boldsymbol{R}^n/\Lambda$ を種数 g のコンパクト *Riemann* 面 M_g の平坦トーラス $\boldsymbol{R}^n/\Lambda$ への共形極小はめ込みとする．このとき，平行移動は無視して f は次のように表される：

$$f(p) = \Re \int_{p_0}^{p} (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T \quad Mod\ \Lambda, \tag{1}$$

ここで $p_0 \in M$ は定点，T は転置行列の意味であり，$\{\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n\}$ は M 上の正則微分で次をみたすものである．

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \text{ は共通ゼロ点がない} \tag{2}$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_n^2 = 0 \tag{3}$$

$$\left\{ \Re \int_\gamma (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T \mid \gamma \in H_1(M_g, \boldsymbol{Z}) \right\} \text{ は } \Lambda \text{ の部分格子になる} \tag{4}$$

逆に上の 3 つの条件 (2)〜(4) をみたすような $\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ を用いた線積分 (1) によって定義される f は平坦トーラス内への共形極小はめ込みを定義する．

上記の (4) は周期条件と云われており，線積分 (1) の well-defined 性を保証している．ここで次の f の随伴はめ込み f_θ を考える：

$$f_\theta(p) := \Re \int_{p_0}^{p} e^{i\theta} (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$$

f_θ が well-defined であるとき，これを f の随伴極小曲面と云う．特に随伴極小曲面 $f_{\pi/2}$ の事を f の共役極小曲面と云う．

Theorem 2.1 における共形極小はめ込み (1) に対して Gauss 写像 G が次の正則写像として与えられた [1], [6]：

$$\begin{aligned} M_g &\longrightarrow Q_{n-2} \subset \mathbf{C}P^{n-1} \\ p &\longmapsto (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)_p \end{aligned}$$

ただし，$Q_{n-2} := \{[w] \in \mathbf{C}P^{n-1} | w \cdot w = \sum_i (w^i)^2 = 0\}$ (" · " は複素双線形内積)

$\mathbf{C}P^{n-1}$ 内では $(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ と $e^{i\theta}(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ とは同じ対象である．しかし (1) ではその線積分の実部をとる事から，これらは極小曲面としては異なる対象である f と f_θ を定義する．この事から極小曲面においてはその"実のカテゴリー"と"複素のカテゴリー"とのギャップを考察する事が重要であり，随伴極小曲面の存在の研究はその一環である．実際，$n = 3$ において可算稠密な $\theta \in S^1$ に対して随伴極小曲面 f_θ が存在するとき f は Property **P** をみたすと云うのであるが，以下の結果が知られている：

Theorem 2.2 (Corollary 5.1 in [2]). $f : M_g \longrightarrow \boldsymbol{R}^3/\Lambda$ が *Property* $\boldsymbol{P}$ を満たすとき

$$\boldsymbol{C}/\Lambda_1 \times \boldsymbol{C}/\Lambda_1 \times \boldsymbol{C}/\Lambda_1 \times \boldsymbol{C}^{g-3}/\Lambda_2 \longrightarrow Jac(M_g)$$

が有限被覆になる．

この結果は随伴極小曲面の存在が Jacobi 多様体の構造にある種の制限を与えている事を主張している．Jacobi 多様体は複素の対象であるので，この結果は随伴極小曲面の存在性が複素のカテゴリーに何らかの影響を与えている事を示唆している．ちなみに随伴極小曲面の存在に対する判定法は長野-Smyth [4], [5] によって与えられている．

3 Triply periodic minimal surfaces

このセクションでは3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内の3方向に周期的な極小曲面，つまり3次元平坦トーラス内のコンパクト極小曲面を古典的な曲面論の観点から考察し，代表的な結果を紹介する事を目標とする．

前セクションで与えた Gauss 写像 G は古典的なものに一致する：

$$\begin{aligned} G : M_g &\longrightarrow S^2 \cong \mathbf{C}P^1 \\ p &\longmapsto n_p \text{ (unit normal vector)} \end{aligned}$$

このとき Gauss 写像の像 $G(M_g)$ の面積を全曲率や写像度を用いて表すと

(以下の等式の詳細は[2], [6]などを参照されたい)

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(M_g) &= -\int_{M_g} K dv = 4\pi(g-1)\\ &= \deg(G)\mathrm{Area}(S^2) = 4\pi \deg(G)\end{aligned}$$

この事からGauss写像Gの写像度は$g-1$となる事が判る．次に見られるようにこれを用いると種数の低い極小曲面は完全に分類される．

Theorem 3.1. 共形極小はめ込み$f: M_g \longrightarrow \boldsymbol{R}^3/\Lambda$をとる．このとき
(1) 種数が0の極小曲面は正則微分が存在しないため存在しない．
(2) 種数が1の極小曲面は*Gauss*写像が定値になる事から適当な全測地的2次元部分トーラス内に横たわり，fは正則はめ込みになる．
(3) 種数が2の極小曲面は*Gauss*写像がS^2への写像度1の正則写像，つまり正則同型になるので矛盾，よって存在しない．
(4) 種数が3の極小曲面は*Gauss*写像がS^2への分岐2重被覆を与えるので超楕円型曲線になる．
(4) 種数が4の極小曲面は*Gauss*写像がS^2への分岐3重被覆を与えるので*trigonal*曲線になる．

超楕円型極小曲面の具体例としてはSchwarz P 曲面，Schwarz D 曲面，Schoen's Gyroidなどが知られており，それぞれProperty **P**を満たす(実際は上記の3つは互いに随伴極小曲面になっている)．ではtrigonal極小曲面のProperty **P**を満たすような具体例はどうかと云う事であるが，次のセクションにてそれを紹介する．

4 Examples

前作のtrigonal極小曲面$w^3 = z^6 - 1$ [7]の一般形を考える．M_gを

$$w^3 = z^{3k+3} - 1 \quad (g = 3k+1,\ k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{5}$$

で定義された種数gのtrigonal曲線とする．このとき

$$H^0(M, K) = < \frac{dz}{w^2}, z\frac{dz}{w^2}, \cdots, z^{2k}\frac{dz}{w^2}, \frac{dz}{w}, z\frac{dz}{w}, \cdots, z^{k-1}\frac{dz}{w} >$$

今，以下の $\mathbf{R}^3$ への極小はめ込みを考える：

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ p &\longmapsto \Re \int_{p_0}^{p} \underbrace{\left(\frac{1-z^{2k}}{w^2},\, \frac{i\,(1+z^{2k})}{w^2},\, \frac{2\,z^k}{w^2} \right)^T dz}_{\Psi} . \end{aligned}$$

ここで次の φ を考える：

$$\varphi(z,w) := (e^{\frac{2\pi}{3(k+1)}i} z, w)$$

このとき

$$\varphi^*\Psi = e^{\frac{2\pi}{3}i} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3(k+1)}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3(k+1)}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3(k+1)}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3(k+1)}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi$$

Remark 4.1.
$\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3(k+1)}\right)$ の値が明確に求まるのは $k = 1, 3, 7, 9$ のときで $\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. このとき $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3(k+1)}\right)$ の値は $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$. これより *explicit* に具体例を求めるのは $k = 1, 3$ のときが最善である事が予想される．実際，周期を計算するときに φ^* を用いるのであるが，sin, cos の型が複雑だと周期を解く事ができないからである．

1-cycle として以下の closed curve をとり，周期を計算する．

$$\begin{aligned} A_1 = &\left\{ (z,\, w) = (e^{it},\, w(t)) \,|\, t \in \left[0, \frac{2\pi}{3(k+1)}\right],\, w\left(\frac{\pi}{3(k+1)}\right) < 0 \right\} \\ &\cup \left\{ (z,\, w) = (e^{-it},\, e^{\frac{2\pi}{3}i}\, w(t)) \,|\, t \in \left[-\frac{2\pi}{3(k+1)}, 0\right],\, w\left(-\frac{\pi}{3(k+1)}\right) < 0 \right\} \\ A_2 = &\left\{ (z,\, w) = (e^{it},\, w(t)) \,|\, t \in \left[0, \frac{2\pi}{3(k+1)}\right],\, w\left(\frac{\pi}{3(k+1)}\right) < 0 \right\} \\ &\cup \left\{ (z,\, w) = (e^{-it},\, (e^{\frac{2\pi}{3}})^2\, w(t)) \,|\, t \in \left[-\frac{2\pi}{3(k+1)}, 0\right],\, w\left(-\frac{\pi}{3(k+1)}\right) < 0 \right\} \end{aligned}$$

以下 φ を用いれば 1-cycle を与える事ができる．

Example 4.1.
(*1*) $k = 1$ のとき，これは前作の *trigonal* 極小曲面の具体例となる．
(*2*) $k = 3$ のとき，これは *A. Schoen* の *I-WP* 曲面となる．
上記の *2* つの具体例は *Property* $\boldsymbol{P}$ を満たす．

5 An example of trigonal minimal surfaces in 4-tori

このセクションでは以下の4次元平坦トーラス内の極小曲面の具体例を紹介する：

$$(6)\quad \begin{aligned} f: M_{10} &\longrightarrow \mathbf{R}^4/\Lambda \\ p &\longmapsto \Re\int_{p_0}^{p}\left(\frac{1-z^6}{w^2}, \frac{i(1+z^6)}{w^2}, \frac{z^5+z}{w^2}, \frac{i(z^5-z)}{w^2}\right)^T dz \\ &\qquad (w^3 = z^{12}-1), \end{aligned}$$

ここでΛはベータ関数B(a,b)を用いて以下で与えられる:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3\alpha & \frac{3}{2}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\gamma & \frac{3}{2}\gamma \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{6\sqrt[3]{2}} B(2/3, 1/6), \\ \gamma = \dfrac{1}{12} B(1/3, 1/6) \end{cases}$$

f はwell-definedであるし，共役極小曲面をもち，さらに可算稠密な角度 $e^{i\theta} \in S^1$ に対して随伴極小曲面をもつ事が直接計算で判る．以下ではこれの性質を考える．

5.1 General type

拙著論文[7]において筆者は $w^3 = z^6 - 1$ 型の極小曲面を考えた．これの高種数化を考える．M_g を以下のcyclic covering of a line (p.73 [3])で定義されるtrigonal曲線とする：

$$w^3 = z^{3(k+1)} - 1 \quad (g = 3k+1,\ k = 1, 2, 3, \cdots).$$

このとき正則微分全体の空間 $H^0(M_g, K)$ は以下で与えられる：

$$H^0(M, K) = \mathrm{span}\left\{\frac{dz}{w^2}, z\frac{dz}{w^2}, \cdots, z^{2k}\frac{dz}{w^2}, \frac{dz}{w}, z\frac{dz}{w}, \cdots, z^{k-1}\frac{dz}{w}\right\}.$$

分岐3重被覆 $(z,w)\longmapsto z$ によってこの極小曲面が筆者による Moduli 空間の連結成分の元である事が示される (詳細は [7] を参照されたい). $[s_1,s_2]=[1,z]$, $[t_1,t_2]=[1,z^{2k-1}]$ とおくと以下の極小はめ込みを得る

$$
\begin{aligned}
f: M &\longrightarrow \mathbf{R}^4 \\
p &\longmapsto \Re\int_{p_0}^{p}\underbrace{\left(\frac{1-z^{2k}}{w^2},\ \frac{i\,(1+z^{2k})}{w^2},\ \frac{z^{2k-1}+z}{w^2},\ i\,\frac{z^{2k-1}-z}{w^2}\right)^T}_{\Psi} dz\,.
\end{aligned}
$$

今, $\varphi(z,w):=(e^{\frac{2\pi}{3(k+1)}i}z,w)$ で定義される自己同型 φ を考えると, これの Gauss 写像に対する作用は以下で与えられる

$$
\varphi^*\Psi=e^{\frac{2\pi}{3}i}\begin{pmatrix} R\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{2\pi}{3(k+1)}\right) & 0 \\ 0 & R\left(\frac{4\pi}{3(k+1)}-\frac{2\pi}{3}\right)\end{pmatrix}\Psi,
$$

ここで

$$
R(\theta):=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.
$$

Remark 5.1.
$k=1,3,7,9$ のとき, $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{2\pi}{3(k+1)}\right)$ の値は *explicit* に判って次のようになる: $\left\{1/2,0,-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right\}$. また, このとき $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{2\pi}{3(k+1)}\right)$ は $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2},1,\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right\}$ となる. この事から具体例を *explicit* に求めたい場合, 上の型では $k=1,3$ がベストである事が示唆される.

Remark 5.1 より, $k=3$ つまり $g=10$ の場合を考える事にする. このとき M_{10} は $w^3=z^{12}-1$ によって定義され, f は以下で与えられる

$$
\begin{aligned}
f: M_{10} &\longrightarrow \mathbf{R}^4 \\
p &\longmapsto \Re\int_{p_0}^{p}\underbrace{\left(\frac{1-z^6}{w^2},\ \frac{i\,(1+z^6)}{w^2},\ \frac{z^5+z}{w^2},\ \frac{i\,(z^5-z)}{w^2}\right)^T}_{\Psi} dz,
\end{aligned}
$$

そして φ は $\varphi(z,w)=(e^{\frac{\pi}{6}i}z,w)$. となり，Gauss 写像への作用は

$$\varphi^*\Psi = e^{\frac{2\pi}{3}i}\begin{pmatrix} R\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & R\left(-\frac{\pi}{3}\right)\end{pmatrix}\Psi = e^{\frac{2\pi}{3}i}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\Psi$$

となる.

5.2 Homologically triviality

ここでは f の位相的性質を考え，$f(M_{10})$ が $\mathbf{R}^4/\Lambda$ 内で 0 にホモローグである事を示す.

$$(x^1,\, x^2,\, x^3,\, x^4) = \Re\int_{p_0}^{p}\left(\frac{1-z^6}{w^2},\, \frac{i\,(1+z^6)}{w^2},\, \frac{z^5+z}{w^2},\, \frac{i\,(z^5-z)}{w^2}\right)^T dz,$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ dx^4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1-z^6}{w^2}\,dz + \frac{1-\bar{z}^6}{\bar{w}^2}\,d\bar{z} \\ \frac{i\,(1+z^6)}{w^2}\,dz - \frac{i\,(1+\bar{z}^6)}{\bar{w}^2}\,d\bar{z} \\ \frac{z^5+z}{w^2}\,dz + \frac{\bar{z}^5+\bar{z}}{\bar{w}^2}\,d\bar{z} \\ \frac{i\,(z^5-z)}{w^2}\,dz - \frac{i\,(\bar{z}^5-\bar{z})}{\bar{w}^2}\,d\bar{z} \end{pmatrix}$$

となる. この事から

$$\begin{aligned}
dx^1\wedge dx^2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{1-z^6}{w^2}\,dz + \frac{1-\bar{z}^6}{\bar{w}^2}\,d\bar{z}\right)\wedge\left(\frac{i\,(1+z^6)}{w^2}\,dz - \frac{i\,(1+\bar{z}^6)}{\bar{w}^2}\,d\bar{z}\right) \\
&= -\frac{i}{2}\,\frac{1-|z|^{12}}{|w|^4}\,dz\wedge d\bar{z}, \\
dx^1\wedge dx^3 &= \frac{1}{4}\left(\frac{1-z^6}{w^2}\,dz + \frac{1-\bar{z}^6}{\bar{w}^2}\,d\bar{z}\right)\wedge\left(\frac{z^5+z}{w^2}\,dz + \frac{\bar{z}^5+\bar{z}}{\bar{w}^2}\,d\bar{z}\right) \\
&= \frac{1}{4}\,\frac{-(z-\bar{z})(1+|z|^{10})-(z^5-\bar{z}^5)(1+|z|^2)}{|w|^4}\,dz\wedge d\bar{z}, \\
dx^1\wedge dx^4 &= \frac{1}{4}\left(\frac{1-z^6}{w^2}\,dz + \frac{1-\bar{z}^6}{\bar{w}^2}\,d\bar{z}\right)\wedge\left(\frac{i\,(z^5-z)}{w^2}\,dz - \frac{i\,(\bar{z}^5-\bar{z})}{\bar{w}^2}\,d\bar{z}\right)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{i}{4}\,\frac{-(z+\bar z)(1+|z|^{10})+(z^5+\bar z^5)(1+|z|^2)}{|w|^4}\,dz\wedge d\bar z,$$

$$dx^2\wedge dx^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{i\,(1+z^6)}{w^2}\,dz-\frac{i\,(1+\bar z^6)}{\bar w^2}\,d\bar z\right)\wedge\left(\frac{z^5+z}{w^2}\,dz+\frac{\bar z^5+\bar z}{\bar w^2}\,d\bar z\right)$$

$$= \frac{i}{4}\,\frac{(z+\bar z)(1+|z|^{10})+(z^5+\bar z^5)(1+|z|^2)}{|w|^4}\,dz\wedge d\bar z,$$

$$dx^2\wedge dx^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{i\,(1+z^6)}{w^2}\,dz-\frac{i\,(1+\bar z^6)}{\bar w^2}\,d\bar z\right)\wedge\left(\frac{i\,(z^5-z)}{w^2}\,dz-\frac{i\,(\bar z^5-\bar z)}{\bar w^2}\,d\bar z\right)$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{(z-\bar z)(1+|z|^{10})-(z^5-\bar z^5)(1+|z|^2)}{|w|^4}\,dz\wedge d\bar z,$$

$$dx^3\wedge dx^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{z^5+z}{w^2}\,dz+\frac{\bar z^5+\bar z}{\bar w^2}\,d\bar z\right)\wedge\left(\frac{i\,(z^5-z)}{w^2}\,dz-\frac{i\,(\bar z^5-\bar z)}{\bar w^2}\,d\bar z\right)$$

$$= -\frac{i}{2}\,\frac{-|z|^2+|z|^{10}}{|w|^4}\,dz\wedge d\bar z.$$

$z=re^{i\theta}$ $(0\le r\le\infty,\,0\le\theta\le 2\pi)$ とおくと $dz\wedge d\bar z=-2\,i\,r dr\wedge d\theta$ となる．まず

$$\begin{aligned}\int_{M_{10}} dx^1\wedge dx^2 &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty}\frac{i}{2}\,\frac{1-r^{12}}{\sqrt[3]{(r^{24}-2r^{12}\,\cos(12\,\theta)+1)^2}}\,2ir\,dr\,d\theta\\ &= -\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{1}+\int_{r=1}^{\infty}\right)\\ &= -\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{1}-\int_{r'=0}^{1}\right) \qquad (r'=1/r)\\ &= 0.\end{aligned}$$

同様に $\int_{M_{10}} dx^3\wedge dx^4=0$ を得る．次に

$$\begin{aligned}\int_{M_{10}} dx^1\wedge dx^3 &= -\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty}\frac{r\sin\theta(1+r^{10})+r^5\,\sin(5\,\theta)(1+r^2)}{\sqrt[3]{(r^{24}-2r^{12}\,\cos(12\,\theta)+1)^2}}\,r dr\,d\theta\\ &= -\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\infty}-\int_{\theta=\pi}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty}\\ &= -\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\infty}+\int_{\theta'=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\infty} \qquad (\theta'=\theta-\pi)\\ &= 0.\end{aligned}$$

同様に $\int_{M_{10}} dx^1\wedge dx^4=\int_{M_{10}} dx^2\wedge dx^3=\int_{M_{10}} dx^2\wedge dx^4=0$ を得る．以上より $[f(M_{10})]=0$ が成り立つ．

5.3 Symmetry

このセクションでは f が可約対称群しかもたない事を示す，しかも f の極大対称群は 2 面体群 D_{12} のみである事も判る．

$S_f(M_g)$ を f の対称群とする．任意の $g \in S_f(M_g)$ に対して次の可換図式が成り立つ：

$$
\begin{tikzcd}
M_g \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowleft"] & & \mathbf{R}^4/\Lambda \arrow[d, "\begin{array}{l}\exists\text{ affine transformation}\\ A \in GL(4,\mathbf{R}) \oplus \mathrm{t} \in \mathbf{R}^4\end{array}"] \\
M_g \arrow[rr, "f"'] & & \mathbf{R}^4/\Lambda
\end{tikzcd}
$$

Gauss 写像を考えると，この作用は球面間の自己同型 g' を導く：

$$
\begin{tikzcd}
M_g \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "/j"'] \arrow[ddd, "g"'] \arrow[dddr, phantom, "\circlearrowleft"] & & Q_2 \subset \mathbf{C}P^3 \arrow[ddd, "A"] \arrow[dddl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& M_g/j \cong S^2 \arrow[ur, "\text{embedding}"'] \arrow[d, "\exists g'"'] & \\
& M_g/j \cong S^2 \arrow[dr, "\text{embedding}"] & \\
M_g \arrow[ur, "/j"] \arrow[rr, "G"'] & & Q_2 \subset \mathbf{C}P^3
\end{tikzcd}
$$

$S'_f(M_g)$ を $M_g/j \cong S^2$ 間の自己同型を誘導するような M_g の自己同型群全体とする．このとき $S_f(M_g) \subset S'_f(M_g)$ となる．今，j の分岐点を $p_\alpha = (e^{\frac{\pi}{6}\alpha i}, 0)$ $(1 \leq \alpha \leq 12)$ とすると，$M_g/j \cong S^2$ 間の自己同型は $S^2 - \{p_\alpha\}_{\alpha=1}^{12} \subset S^2$ 間の自己同型から導かれる．M_g は $w^3 = z^{12} - 1$ によって定義されているので，簡単な関数論の議論によって $S^2 - \{p_\alpha\}_{\alpha=1}^{12}$ の自己同型群は $z \longmapsto e^{\frac{\pi}{6}i}z$ と $z \longmapsto 1/z$ によって生成される 2 面体群 D_{12} となる．j はトーラス間のアフィン変換を誘導しない事に注意すると $S'_f(M_g) = D_{12}$ となる．ここで $\phi := \varphi \circ j^2$，$\phi'(z, w) = (x, y) = (1/z, w/z^4)$

とおくと

$$\phi^* f = \begin{pmatrix} R\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & R\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} f, \quad \phi'^* f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f$$

となる．明らかに ϕ と ϕ' は可約表現になっており，f の対称群 D_{12} を生成する．以上より $S_f(M_g)$ は可約表現となり，極大対称群は ϕ と ϕ' によって生成される D_{12} となる．

section 5 における議論により Main Theorem が従う．

6 Appendix

この節では Example 4.1 (1) の訂正版を与える．これは神戸大博士課程の学生である藤森祥一氏との共同研究に端を発する．当初はこの具体例のグラフィックを通してその構造を解読する事を目標としていたのであるが，研究していくうちに [7] における格子がベストの形でない事が判明したのでその報告をしたい．

まず，考える極小はめ込みは以下で与えられた：

$$\begin{aligned} f : M_4 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ p &\longmapsto \Re \int_{p_0}^{p} \left(\frac{1-z^2}{w^2}, \frac{i(1+z^2)}{w^2}, \frac{2z}{w^2} \right)^T dz \\ & \qquad\qquad (M_4 \ : \ w^3 = z^6 - 1) \end{aligned}$$

さらに φ の Gauss 写像への作用は次で与えられる：

$$\varphi^* \begin{pmatrix} \dfrac{1-z^2}{w^2} \\ \dfrac{i(1+z^2)}{w^2} \\ \dfrac{2z}{w^2} \end{pmatrix} dz = e^{\frac{2\pi}{3} i} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1-z^2}{w^2} \\ \dfrac{i(1+z^2)}{w^2} \\ \dfrac{2z}{w^2} \end{pmatrix} dz$$

$\dfrac{1-z^2}{w^2}\,dz$-case.

$\eta = \dfrac{z^2+1}{z} = 2\cos t \ :\ 2 \longmapsto 1 \ \ or \ \ 1 \longmapsto 2$ とおく．このとき $d\eta = \dfrac{z^2-1}{z^2}\,dz.$

$$\frac{1-z^2}{w^2}\,dz = -\frac{z^2}{w^2}\,d\eta$$

$$\left(\frac{z^2}{w^2}\right)^3 = \frac{z^6}{(z^6-1)^2} = \frac{1}{z^6+\frac{1}{z^6}-2}$$

ここで

$$z+\frac{1}{z}=\eta, \quad z^2+\frac{1}{z^2}=\eta^2-2, z^4+\frac{1}{z^4}=\eta^4-4\eta^2+2$$

より

$$z^6+\frac{1}{z^6}=(z^2+\frac{1}{z^2})(z^4-1+\frac{1}{z^4})=(\eta^2-2)(\eta^4-4\eta^2+1)$$

$$\left(\frac{z^2}{w^2}\right)^3 = \frac{-1}{(\eta^2-1)^2(4-\eta^2)} < 0$$

$$\frac{z^2}{w^2}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{4^{\frac{1}{3}}}$$

よって

$$\frac{z^2}{w^2} = \frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{((4-\eta^2)(\eta^2-1)^2)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{1-z^2}{w^2}\,dz = -\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{((4-\eta^2)(\eta^2-1)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta$$

これより

$$\begin{aligned}\int_{A_1}\frac{1-z^2}{w^2}\,dz &= \int_2^1 -\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{((4-\eta^2)(\eta^2-1)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta + \int_1^2 -\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{e^{\frac{4\pi}{3}i}((4-\eta^2)(\eta^2-1)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta \\ &= (1+e^{\frac{\pi}{3}i})\int_1^2 \frac{dt}{((4-t^2)(t^2-1)^2)^{\frac{1}{3}}}\end{aligned}$$

A_2-case も同様に

$$\int_{A_2}\frac{1-z^2}{w^2}dz=\int_2^1-\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{((4-\eta^2)(\eta^2-1)^2)^{\frac{1}{3}}}d\eta+\int_1^2-\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{e^{\frac{8\pi}{3}i}((4-\eta^2)(\eta^2-1)^2)^{\frac{1}{3}}}d\eta$$
$$=(e^{\frac{2\pi}{3}i}+e^{\frac{\pi}{3}i})\int_1^2\frac{dt}{((4-t^2)(t^2-1)^2)^{\frac{1}{3}}}$$

$\dfrac{i\,(1+z^2)}{w^2}\,dz$-case.

$\eta=-i\,\dfrac{z^2-1}{z}=2\sin t\ :\ 0\longmapsto\sqrt{3}\ \ or\ \ \sqrt{3}\longmapsto 0$ とおく．このとき
$d\eta=-i\,\dfrac{z^2+1}{z^2}\,dz.$

$$\frac{i\,(1+z^2)}{w^2}dz=-\frac{z^2}{w^2}d\eta$$
$$\left(\frac{z^2}{w^2}\right)^3=\frac{z^6}{(z^6-1)^2}=\frac{1}{z^6+\frac{1}{z^6}-2}$$

ここで

$$z-\frac{1}{z}=i\,\eta,\quad z^2+\frac{1}{z^2}=2-\eta^2,z^4+\frac{1}{z^4}=\eta^4-4\eta^2+2$$

より

$$z^6+\frac{1}{z^6}=(z^2+\frac{1}{z^2})(z^4-1+\frac{1}{z^4})=(2-\eta^2)(\eta^4-4\eta^2+1)$$
$$\left(\frac{z^2}{w^2}\right)^3=\frac{-1}{(\eta^2(3-\eta^2)^2)}<0$$
$$\frac{z^2}{w^2}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{4^{\frac{1}{3}}}$$

よって

$$\frac{z^2}{w^2}=\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{(\eta^2(3-\eta^2)^2)^{\frac{1}{3}}}$$
$$\frac{i\,(1+z^2)}{w^2}dz=-\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{(\eta^2(3-\eta^2)^2)^{\frac{1}{3}}}d\eta$$

以上より

$$\int_{A_1} \frac{i\,(1+z^2)}{w^2}\,dz = \int_0^{\sqrt{3}} -\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{(\eta^2(3-\eta^2)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta + \int_{\sqrt{3}}^{0} -\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{e^{\frac{4\pi}{3}i}\,(\eta^2(3-\eta^2)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta$$

$$= -(1+e^{\frac{\pi}{3}i}) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(t^2(3-t^2)^2)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= -(1+e^{\frac{\pi}{3}i})\,\frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt[3]{s^2(1-s^2)^2}} \qquad (s = t/\sqrt{3})$$

$$= -(1+e^{\frac{\pi}{3}i})\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x^{5/6}\,(1-x)^{2/3}} \qquad (x = s^2)$$

$$= -(1+e^{\frac{\pi}{3}i})\,\frac{1}{2\sqrt{3}}\,B(1/3, 1/6) \qquad (B(a,b)\ :\ \text{Beta function})$$

$A_2 - case$ も同様に

$$\int_{A_2} \frac{i\,(1+z^2)}{w^2}\,dz = \int_0^{\sqrt{3}} -\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{(\eta^2(3-\eta^2)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta + \int_{\sqrt{3}}^{0} -\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{e^{\frac{8\pi}{3}i}\,(\eta^2(3-\eta^2)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta$$

$$= -(e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{\pi}{3}i}) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(t^2(3-t^2)^2)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= -(e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{\pi}{3}i})\,\frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt[3]{s^2(1-s^2)^2}} \qquad (s = t/\sqrt{3})$$

$$= -(e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{\pi}{3}i})\,\frac{1}{2\sqrt{3}}\,B(1/3, 1/6)$$

$\dfrac{2\,z}{w^2}\,dz$-case.

$$\eta = -i\,\frac{z^2-1}{z^2+1} = -i\,\frac{e^{2it}-1}{e^{2it}+1} = \tan t : 0 \longmapsto \sqrt{3} \text{ or } \sqrt{3} \longmapsto 0$$

このとき $d\eta = -i\,\dfrac{4\,z}{(z^2+1)^2}\,dz$

$$\frac{2\,z}{w^2}\,dz = 2\,\frac{z}{w^2}\,\frac{(z^2+1)^2}{-4i\,z}\,d\eta = 2i\,\frac{z^2}{w^2}\,\frac{(z^2+1)^2}{4\,z^2}\,d\eta$$

$$1+\eta^2 = 1-\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^2 = \frac{4\,z^2}{(z^2+1)^2}$$

$$\frac{2z}{w^2}\,dz = 2i\,\frac{z^2}{w^2}\,\frac{d\eta}{1+\eta^2}$$

$$\left(\frac{z^2}{w^2}\right)^3 = \frac{z^6}{(z^6-1)^2} = \frac{1}{z^6+\frac{1}{z^6}-2} = -\frac{(1+\eta^2)^3}{4\eta^2(3-\eta^2)^2}$$

ここで

$$\frac{z^2}{w^2}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{(-2^{\frac{1}{3}})^2}$$

よって

$$\frac{z^2}{w^2} = \frac{1+\eta^2}{4^{\frac{1}{3}}\,(\eta^2(3-\eta^2)^2)^{\frac{1}{3}}}\,e^{\frac{\pi}{3}i}$$

故に

$$\frac{2z}{w^2}\,dz = 2^{\frac{1}{3}}i\,\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{(\eta^2(3-\eta^2)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta$$

以上より

$$\begin{aligned}
\int_{A_1}\frac{2z}{w^2}\,dz &= \int_0^{\sqrt{3}} 2^{\frac{1}{3}}i\,\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{(\eta^2(3-\eta^2)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta + \int_{\sqrt{3}}^0 2^{\frac{1}{3}}i\,\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{e^{\frac{4\pi}{3}i}\,(\eta^2(3-\eta^2)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta \\
&= i\,(1+e^{\frac{\pi}{3}i})\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2^{\frac{1}{3}}}{(t^2(3-t^2)^2)^{\frac{1}{3}}}\,dt \\
&= i\,(1+e^{\frac{\pi}{3}i})\,\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{ds}{\sqrt[3]{s^2(1-s^2)^2}} \qquad (s=t/\sqrt{3}) \\
&= i\,(1+e^{\frac{\pi}{3}i})\,\frac{1}{\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}\,B(1/3,1/6)
\end{aligned}$$

A_2-case も同様に

$$\begin{aligned}
\int_{A_2}\frac{2z}{w^2}\,dz &= \int_0^{\sqrt{3}} 2^{\frac{1}{3}}i\,\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{(\eta^2(3-\eta^2)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta + \int_{\sqrt{3}}^0 2^{\frac{1}{3}}i\,\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{e^{\frac{8\pi}{3}i}\,(\eta^2(3-\eta^2)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta \\
&= i\,(e^{\frac{2\pi}{3}i}+e^{\frac{\pi}{3}i})\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2^{\frac{1}{3}}}{(t^2(3-t^2)^2)^{\frac{1}{3}}}\,dt \\
&= i\,(e^{\frac{2\pi}{3}i}+e^{\frac{\pi}{3}i})\,\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{ds}{\sqrt[3]{s^2(1-s^2)^2}} \qquad (s=t/\sqrt{3}) \\
&= i\,(e^{\frac{2\pi}{3}i}+e^{\frac{\pi}{3}i})\,\frac{1}{\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}\,B(1/3,1/6)
\end{aligned}$$

Remark 6.1.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(\eta^2(3-\eta^2)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2^{\frac{1}{3}}\,dt}{(t^2(3-t^2)^2)^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+t^2}} \quad (\eta = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}})$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2^{\frac{1}{3}}}{(\eta^2(3-\eta^2)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\,dt}{(t^2(3-t^2)^2)^{\frac{1}{3}}\sqrt{4-t^2}} \quad (\eta = \frac{t}{\sqrt{4-t^2}})$$

となるので上記の計算結果は [7] の計算結果と一致する.

今,

$$A = \int_1^2 \frac{dt}{((4-t^2)(t^2-1)^2)^{\frac{1}{3}}}, \quad B = \frac{1}{2\sqrt{3}}B(1/3, 1/6)$$

とおき, A と B の関係を求める. そのために $t : \frac{2\pi}{3} \longmapsto \pi$ の場合 (つまり A_3) を考える. このとき $\eta : -1 \longmapsto -2$ or $\eta : -2 \longmapsto -1$

$$\frac{z^2}{w^2}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{e^{\frac{5\pi}{3}i}}{4^{\frac{1}{3}}} = -\frac{e^{\frac{2\pi}{3}i}}{4^{\frac{1}{3}}}$$

より

$$\frac{z^2}{w^2} = -\frac{e^{\frac{2\pi}{3}i}}{((4-\eta^2)(\eta^2-1)^2)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{1-z^2}{w^2}\,dz = \frac{e^{\frac{2\pi}{3}i}}{((4-\eta^2)(\eta^2-1)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta$$

よって

$$\begin{aligned}\int_{A_3} \frac{1-z^2}{w^2}\,dz &= \int_{-1}^{-2} \frac{e^{\frac{2\pi}{3}i}}{((4-\eta^2)(\eta^2-1)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta + \int_{-2}^{-1} \frac{e^{\frac{2\pi}{3}i}}{e^{\frac{4\pi}{3}i}((4-\eta^2)(\eta^2-1)^2)^{\frac{1}{3}}}\,d\eta \\ &= -(e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{\pi}{3}i}) \int_1^2 \frac{dt}{((4-t^2)(t^2-1)^2)^{\frac{1}{3}}} = -(e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{\pi}{3}i})\,A\end{aligned}$$

一方, φ を用いると

$$\begin{aligned}\int_{A_3} \frac{1-z^2}{w^2}\,dz &= (\varphi^*)^2 \int_{A_1} \frac{1-z^2}{w^2}\,dz \\ &= \left(e^{\frac{4\pi}{3}i}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(1+e^{\frac{\pi}{3}i})\begin{pmatrix} A \\ -B \\ i\cdot 2^{\frac{1}{3}}B \end{pmatrix}\right)_{(1,1)} \\ &= -(e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{\pi}{3}i})\,\frac{-A+\sqrt{3}\,B}{2}\end{aligned}$$

故に

$$\sqrt{3}\,A = B$$

また Remark 6.1 より

$$C = 2^{1/3}\,B$$

この極小曲面の周期行列 Ω_4 は

$$\begin{aligned}
\Omega_4 &= \Re(X, Y) \\
&= \Re\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2}A & -3A & 3A & \frac{3}{2}A & 0 & 0 & \frac{3}{2}A \\ 0 & \frac{3}{2}B & 0 & 0 & \frac{3}{2}B & 0 & 0 & -\frac{3}{2}B \\ -\sqrt{3}C & \frac{\sqrt{3}}{2}C & \frac{\sqrt{3}}{2}C & \frac{\sqrt{3}}{2}C & \frac{\sqrt{3}}{2}C & -\sqrt{3}C & -\sqrt{3}C & \frac{\sqrt{3}}{2}C \end{pmatrix} \\
&\quad + i\begin{pmatrix} \sqrt{3}A & -\frac{\sqrt{3}}{2}A & -\sqrt{3}A & -\sqrt{3}A & -\frac{\sqrt{3}}{2}A & \sqrt{3}A & -\sqrt{3}A & \frac{\sqrt{3}}{2}A \\ -\sqrt{3}B & \frac{\sqrt{3}}{2}B & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}B & \sqrt{3}B & \sqrt{3}B & -\frac{\sqrt{3}}{2}B \\ 0 & -\frac{3}{2}C & -\frac{3}{2}C & \frac{3}{2}C & \frac{3}{2}C & 0 & 0 & -\frac{3}{2}C \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ここで

$$X = \left((\omega^2-\omega)\begin{pmatrix} -A \\ B \\ -iC \end{pmatrix} \quad (1-\omega^2)\begin{pmatrix} -A \\ B \\ -iC \end{pmatrix} \quad (1-\omega^2)\begin{pmatrix} -2A \\ 0 \\ -iC \end{pmatrix} \quad (\omega-1)\begin{pmatrix} -2A \\ 0 \\ -iC \end{pmatrix} \right)$$

$$Y = \left((\omega-1)\begin{pmatrix} -A \\ -B \\ -iC \end{pmatrix} \quad (\omega^2-\omega)\begin{pmatrix} -A \\ -B \\ -iC \end{pmatrix} \quad (\omega^2-\omega)\begin{pmatrix} A \\ -B \\ -iC \end{pmatrix} \quad (1-\omega^2)\begin{pmatrix} A \\ -B \\ -iC \end{pmatrix} \right)$$

簡単な基本変形によって

$$\Omega_4 \cong \Lambda_4 = \begin{pmatrix} 3A & \frac{3}{2}A & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}B & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}B & \frac{\sqrt{3}}{2}B & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}B & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2^{2/3}}B \end{pmatrix}$$

以上より以下の共形極小はめ込みを得る：

$$\begin{aligned}
f : M_4 &\longrightarrow \mathbf{R}^3/\Lambda_4 \\
p &\longmapsto \Re\int_{p_0}^{p} \left(\frac{1-z^2}{w^2}, \frac{i\,(1+z^2)}{w^2}, \frac{2\,z}{w^2} \right)^T dz
\end{aligned}$$

参考文献

[1] D. A. Hoffman and R. Osserman, *The geometry of the generalized Gauss map*, Mem. Amer. Math. Soc. vol.28, No.236 (1980).

[2] W. H. Meeks III, *The theory of triply periodic minimal surfaces*, Indiana Univ Math Journal 39 No3 (1990), 877–935.

[3] R. Miranda, *Argebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics Vol 5, AMS (1995).

[4] T. Nagano and B. Smyth, *Periodic minimal surfaces*, Comment. Math. Helv 35 (1978), 29–55.

[5] ———, *Periodic minimal surfaces and Weyl groups*, Acta. Math 145 (1980), 1–27.

[6] R. Osserman, *A survey of Minimal surfaces*, Dover Publications, New York, 2nd edition, 1986.

[7] T. Shoda, *New components of the moduli space of minimal surfaces in 4-dimensional flat tori*, J. London. Math. Soc (2) 70, no. 3, 797–816 (2004).